МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Горно-Алтайский государственный университет»
(ФГБОУ ВО ГАГУ, ГАГУ, Горно-Алтайский государственный университет)

Методы решения олимпиадных задач по математике

рабочая программа дисциплины (модуля)

Закреплена за кафедрой	**кафедра математики, физики и информатики**
Учебный план	44.03.05_2024_674.plx 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) Математика и Физика
Квалификация	**бакалавр**
Форма обучения	**очная**
Общая трудоемкость	**7 ЗЕТ**

Часов по учебному плану	252
в том числе:	
аудиторные занятия	74
самостоятельная работа	131,2
часов на контроль	43,6

Виды контроля в семестрах:
экзамены 10
зачеты 9

Распределение часов дисциплины по семестрам

Семестр (<Курс>.<Семестр на курсе>)	**9 (5.1)**		**10 (5.2)**		Итого	
Недель	10 3/6		7 3/6			
Вид занятий	УП	РП	УП	РП	УП	РП
Лекции	18	18	18	18	36	36
Практические	20	20	18	18	38	38
Консультации (для студента)	0,9	0,9	0,9	0,9	1,8	1,8
Контроль самостоятельной работы при проведении аттестации	0,15	0,15	0,25	0,25	0,4	0,4
Консультации перед экзаменом			1	1	1	1
Итого ауд.	38	38	36	36	74	74
Контактная работа	39,05	39,05	38,15	38,15	77,2	77,2
Сам. работа	96,1	96,1	35,1	35,1	131,2	131,2
Часы на контроль	8,85	8,85	34,75	34,75	43,6	43,6
Итого	144	144	108	108	252	252

Программу составил(и):
к.ф.-м.н., доцент, Байгонакова Г. А.

Рабочая программа дисциплины

Методы решения олимпиадных задач по математике

разработана в соответствии с ФГОС:

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (приказ Минобрнауки России от 22.02.2018 г. № 125)

составлена на основании учебного плана:

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

утвержденного учёным советом вуза от 01.02.2024 протокол № 2.

Рабочая программа утверждена на заседании кафедры

кафедра математики, физики и информатики

Протокол от 11.04.2024 протокол № 8

Зав. кафедрой И. о. зав. кафедрой: Богданова Рада Александровна

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2025-2026 учебном году на заседании кафедры
кафедра математики, физики и информатики

Протокол от __ __________ 2025 г. № __
Зав. кафедрой И. о. зав. кафедрой: Богданова Рада Александровна

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2026-2027 учебном году на заседании кафедры
кафедра математики, физики и информатики

Протокол от __ __________ 2026 г. № __
Зав. кафедрой И. о. зав. кафедрой: Богданова Рада Александровна

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2027-2028 учебном году на заседании кафедры
кафедра математики, физики и информатики

Протокол от __ __________ 2027 г. № __
Зав. кафедрой И. о. зав. кафедрой: Богданова Рада Александровна

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2028-2029 учебном году на заседании кафедры
кафедра математики, физики и информатики

Протокол от __ __________ 2028 г. № __
Зав. кафедрой И. о. зав. кафедрой: Богданова Рада Александровна

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ	
1.1	*Цели:* формирование систематизированных знаний по методам решения олимпиадных задач по математике.
1.2	*Задачи:* - развитие общей математической культуры; - создание математической базы для дальнейшего профессионального роста и успешного применения полученных знаний в практике преподавания математики в школе; - совершенствование навыков математического и логического мышления; - формирования опыта творческой деятельности через исследовательскую деятельность при решении нестандартных задач.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП	
Цикл (раздел) ООП:	
2.1	**Требования к предварительной подготовке обучающегося:**
2.1.1	Элементарная математика
2.1.2	Алгебра
2.1.3	Аналитическая геометрия
2.2	**Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:**
2.2.1	Методика решения задач ЕГЭ по математике и их критериальное оценивание
2.2.2	Выполнение и защита выпускной квалификационной работы

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)
ПК-3: Способен формировать развивающую образовательную среду для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами преподаваемых учебных предметов.
ИД-1.ПК-3: Владеет способами интеграции учебных предметов для организации развивающей учебной деятельности (исследовательской, проектной, групповой и др.).
Владеет навыками анализа образовательной среды, умеет определять цель деятельности субъектов образовательного процесса и способы ее достижения по курсу школьной математики

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Компетен-ции	Литература	Инте ракт.	Примечание
	Раздел 1. Лекции						
1.1	1. Поиск родственных задач /Лек/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.2	2. Причёсывание задач (или «можно считать, что…») /Лек/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.3	3. Доказательство от противного /Лек/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.4	4. Чётность /Лек/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта

1.5	5. Обратный ход. Подсчёт двумя способами /Лек/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.6	6. Соответствие /Лек/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.7	7. Графы /Лек/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.8	8. Инварианты /Лек/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.9	9. Метод крайнего /Лек/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.10	10. Уход на бесконечность и малые шевеления /Лек/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.11	11. Принцип Дирихле /Лек/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.12	12. Индукция /Лек/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.13	13. Делимость и остатки /Лек/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.14	14. Алгоритм Евклида /Лек/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.15	15. Покрытия, упаковки и замощения /Лек/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.16	16. Раскраски /Лек/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.17	17. Игры /Лек/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.18	18. Процессы и операции /Лек/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
	Раздел 2. Практические занятия						
2.1	1. Поиск родственных задач /Пр/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.2	2. Причёсывание задач (или «можно считать, что…») /Пр/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для

2.3	3. Доказательство от противного /Пр/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.4	4. Чётность /Пр/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.5	5. Обратный ход. /Пр/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.6	6. Подсчёт двумя способами /Пр/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.7	7. Соответствие /Пр/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.8	8. Графы /Пр/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.9	9. Инварианты /Пр/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.10	10. Метод крайнего /Пр/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.11	11. Уход на бесконечность и малые шевеления /Пр/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.12	12. Принцип Дирихле /Пр/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.13	13. Индукция /Пр/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.14	14. Делимость и остатки /Пр/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.15	15. Алгоритм Евклида /Пр/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.16	16. Покрытия, упаковки и замощения /Пр/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.17	17. Раскраски /Пр/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.18	18. Игры /Пр/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для

2.19	19. Процессы и операции /Пр/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
	Раздел 3. Самостоятельная работа						
3.1	1. Поиск родственных задач /Ср/	9	9,61	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневы х задач, приведенных в
3.2	2. Причёсывание задач (или «можно считать, что…») /Ср/	9	9,61	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневы х задач, приведенных в
3.3	3. Доказательство от противного /Ср/	9	9,61	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневы х задач, приведенных в
3.4	4. Чётность /Ср/	9	9,61	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневы х задач, приведенных в
3.5	5. Обратный ход /Ср/	9	9,61	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневы х задач, приведенных в
3.6	6. Подсчёт двумя способами /Ср/	9	9,61	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневы х задач, приведенных в
3.7	7. Соответствие /Ср/	9	9,61	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневы х задач, приведенных в
3.8	8. Графы /Ср/	9	9,61	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневы х задач, приведенных в
3.9	9. Инварианты /Ср/	9	9,61	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневы х задач, приведенных в
3.10	10. Метод крайнего /Ср/	9	9,61	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневы х задач, приведенных в
3.11	11. Уход на бесконечность и малые шевеления /Ср/	10	3,9	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневы х задач, приведенных в
3.12	12. Принцип Дирихле /Ср/	10	3,9	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневы х задач, приведенных в
3.13	13. Индукция /Ср/	10	3,9	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневы х задач, приведенных в
3.14	14. Делимость и остатки /Ср/	10	3,9	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневы х задач, приведенных в
3.15	15. Алгоритм Евклида /Ср/	10	3,9	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневы х задач, приведенных в

3.16	16. Покрытия, упаковки и замощения /Ср/	10	3,9	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневы х задач, приведенных в
3.17	17. Раскраски /Ср/	10	3,9	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневы х задач, приведенных в
3.18	18. Игры /Ср/	10	3,9	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневы х задач, приведенных в
3.19	19. Процессы и операции /Ср/	10	3,9	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневы х задач, приведенных в
	Раздел 4. Консультации						
4.1	Консультация по дисциплине /Конс/	9	0,9	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.4	0	
	Раздел 5. Промежуточная аттестация (зачёт)						
5.1	Подготовка к зачёту /Зачёт/	9	8,85	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.4	0	
5.2	Контактная работа /КСРАтт/	9	0,15	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.4	0	
	Раздел 6. Консультации						
6.1	Консультация по дисциплине /Конс/	10	0,9	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.4	0	
	Раздел 7. Промежуточная аттестация (экзамен)						
7.1	Подготовка к экзамену /Экзамен/	10	34,75	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.4	0	
7.2	Контроль СР /КСРАтт/	10	0,25	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.4	0	
7.3	Контактная работа /КонсЭк/	10	1	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.4	0	

5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

5.1. Пояснительная записка

1. Назначение фонда оценочных средств. Оценочные средства предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины «Методы решения олимпиадных задач по математике».
2. Фонд оценочных средств включает контрольные материалы для проведения текущего контроля в форме разноуровневых заданий, контрольной работы и промежуточной аттестации в форме вопросов к зачету и экзамену.

5.2. Оценочные средства для текущего контроля

Оценочные средства - разноуровневые задачи для проведения текущего контроля к практическим занятиям и варианты контрольной работы приведены в приложениях. Задания для контрольной работы составляют из задач, которые не были рассмотрены на практических занятиях.

5.3. Темы письменных работ (эссе, рефераты, курсовые работы и др.)

Письменные работы при реализации дисциплины не предусмотрены

5.4. Оценочные средства для промежуточной аттестации

Задания к зачету и экзамену
Разработать план-конспект занятия спецкурса по решению олимпиадных задач по пройденным темам с подробным разбором каждой задачи и в качестве наглядности подготовить презентацию.

Примерные вопросы к зачету

1. Поиск родственных задач
2. Причёсывание задач (или «можно считать, что…»)
3. Доказательство от противного
4. Чётность
5. Обратный ход. Подсчёт двумя способами
6. Подсчёт двумя способами
7. Соответствие
8. Графы
9. Инварианты
10. Метод крайнего

Критерии оценивания:
«Зачтено», повышенный уровень – Зачтено» выставляется студенту, если студент обнаружил степень сформированности компетенций, соответствующий продвинутому уровню. При этом студент демонстрирует всестороннее, систематическое и глубокое знание учебного материала, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой. Кроме того, студент усвоил взаимосвязь основных понятий дисциплины в их значении для приобретаемой профессии и умеет применять их в практической деятельности.
«Зачтено», пороговый уровень – «Зачтено» выставляется студенту, если студент обнаружил степень сформированности компетенций, соответствующий базовому уровню. При этом он продемонстрировал знание основного учебного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по специальности, справился с выполнением более 60% заданий, предусмотренных программой. Допустил неточности и ошибки при выполнении заданий, смог при помощи преподавателя их устранить
«Незачтено», уровень не сформирован – вопросы не раскрыты, обнаруживаются пробелы в знаниях, существенное непонимание основных вопросов курса.

Примерные вопросы к экзамену

1. Поиск родственных задач
2. Причёсывание задач (или «можно считать, что…»)
3. Доказательство от противного
4. Чётность
5. Обратный ход. Подсчёт двумя способами
6. Подсчёт двумя способами
7. Соответствие
8. Графы
9. Инварианты
10. Метод крайнего
11. Уход на бесконечность и малые шевеления
12. Принцип Дирихле
13. Индукция
14. Делимость и остатки
15. Алгоритм Евклида
16. Покрытия, упаковки и замощения
17. Раскраски
18. Игры
19. Процессы и операции

Критерии оценки:
Отметка «отлично» ставится, если знания отличаются глубиной и содержательностью, дается полный исчерпывающий ответ, как на основные вопросы билета, так и на дополнительные:
– студент свободно владеет понятийным аппаратом;
– студент способен к интеграции знаний по определенной теме, структурированию ответа, к анализу положений существующих теорий, научных школ, направлений по вопросу билета;
– логично и доказательно раскрывает проблему, предложенную в билете;
– ответ не содержит фактических ошибок и характеризуется глубиной, полнотой, уверенностью студента;
– ответ иллюстрируется примерами, в том числе из собственной практики;
– студент демонстрирует умение вести диалог и вступать в научную дискуссию.
Отметка «хорошо» ставится, если: знания имеют достаточный содержательный уровень, однако отличаются слабой структурированностью; раскрыто содержание билета, имеются неточности при ответе на дополнительны вопросы:
– в ответе имеют место несущественные фактические ошибки, которые студент способен исправить самостоятельно, благодаря наводящему вопросу;
– недостаточно раскрыта проблема по одному из вопросов билета;
– недостаточно логично построено изложение вопроса;
– ответ прозвучал недостаточно уверенно;

– студент не смог показать способность к интеграции и адаптации знаний или теории и практики.
Отметка «удовлетворительно» ставится, если знания имеют фрагментарный характер, отличаются поверхностностью и малой содержательностью, содержании билета раскрыто слабо, имеются неточности при ответе на основные вопросы билета:
– программный материал в основном излагается, но допущены фактические ошибки;
– ответ носит репродуктивный характер;
– студент не может обосновать закономерности и принципы, обосновать факты;
– нарушена логика изложения, отсутствует осмысленность представляемого материала;
– у студента отсутствует представление о межпредметных связях.
Отметка «неудовлетворительно» ставится, если:
– обнаружено незнание или непонимание студентом части предложенного к рассмотрению материала;
– допускаются существенные фактические ошибки, которые студент не может исправить самостоятельно;
– на большую часть дополнительных вопросов по содержанию экзамена студент затрудняется дать ответ или не дает верных ответов.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

6.1. Рекомендуемая литература

6.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Эл. адрес
Л1.1	Шестакова Л. Г.	Методика обучения школьников работать с математической задачей: учебное пособие для студентов	Соликамск: Соликамский государственный педагогический институт, 2013	https://www.iprbookshop.ru/47876.html
Л1.2	Андреев А. А., Карпухина М. И., Максимова Е. А., Скородумова Е. А.	Олимпиада школьников ТИИМ-технологии. Интеллект. Информатика. Математика. Задания, решения, статистика. 2020/2021 учебный год: учебное пособие	Москва: МТУСИ, 2021	https://e.lanbook.com/book/215174

6.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Эл. адрес
Л2.1	Далингер В. А.	Задачи с параметрами: учебное пособие	Омск: Амфора, 2012	https://icdlib.nspu.ru/catalogs/details/icdlib/852233.php
Л2.2	Далингер В. А.	Задачи с модулями: учебное пособие	Омск: ОмГПУ, 2010	https://icdlib.nspu.ru/catalogs/details/icdlib/852232.php
Л2.3	Воробьев Г. А.	Олимпиадные задачи (математика): учебно-методическое пособие	Липецк: Липецкий ГПУ, 2021	https://e.lanbook.com/book/228677
Л2.4	Леонтьева Н. В.	Вопросы обучения школьников решению олимпиадных задач и задач повышенной трудности по математике: учебно-методическое пособие	Глазов: ГГПИ им. Короленко, 2022	https://e.lanbook.com/book/292271

6.3.1 Перечень программного обеспечения

6.3.1.1	Kaspersky Endpoint Security для бизнеса СТАНДАРТНЫЙ
6.3.1.2	MS Office
6.3.1.3	Яндекс.Браузер
6.3.1.4	LibreOffice
6.3.1.5	Moodle
6.3.1.6	NVDA
6.3.1.7	SMART Notebook
6.3.1.8	MS Windows
6.3.1.9	РЕД ОС

6.3.2 Перечень информационных справочных систем

6.3.2.1	Электронно-библиотечная система «Издательство Лань»
6.3.2.2	База данных «Электронная библиотека Горно-Алтайского государственного университета»
6.3.2.3	Электронно-библиотечная система IPRbooks

7. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

	презентация	

	проблемная лекция	

8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Номер аудитории	Назначение	Основное оснащение
206 Б1	Кабинет методики преподавания математики. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации	Ученическая доска, интерактивная доска, экран, проектор, компьютер, посадочные места обучающихся (по количеству обучающихся), рабочее место преподавателя
209 Б1	Компьютерный класс. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации. Помещение для самостоятельной работы	Рабочее место преподавателя. Посадочные места обучающихся (по количеству обучающихся). Маркерная ученическая доска, экран, мультимедиапроектор, компьютеры с доступом в Интернет
207 Б1	Лекционная аудитория. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации	Ученическая доска, проектор, экран, системный блок, посадочные места обучающихся (по количеству обучающихся), рабочее место преподавателя

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Методические указания по освоению дисциплин (модулей)

Лекции, с одной стороны – это одна из основных форм учебных занятий в высших учебных заведениях, представляющая собой систематическое, последовательное устное изложение преподавателем определенного раздела конкретной науки или учебной дисциплины, с другой – это особая форма самостоятельной работы с учебным материалом. Лекция не заменяет собой книгу, она только подталкивает к ней, раскрывая тему, проблему, выделяя главное, существенное, на что следует обратить внимание, указывает пути, которым нужно следовать, добиваясь глубокого понимания поставленной проблемы, а не общей картины.

Работа на лекции – это сложный процесс, который включает в себя такие элементы как слушание, осмысление и собственно конспектирование. Для того, чтобы лекция выполнила свое назначение, важно подготовиться к ней и ее записи еще до прихода преподавателя в аудиторию. Без этого дальнейшее восприятие лекции становится сложным. Лекция в университете рассчитана на подготовленную аудиторию. Преподаватель излагает любой вопрос, ориентируясь на те знания, которые должны быть у студентов, усвоивших материал всех предыдущих лекций.Важно научиться слушать преподавателя во время лекции, поддерживать непрерывное внимание к выступающему.

Однако, одного слушания недостаточно. Необходимо фиксировать, записывать тот поток информации, который сообщается во время лекции – научиться вести конспект лекции, где формулировались бы наиболее важные моменты, основные положения, излагаемые лектором. Для ведения конспекта лекции следует использовать тетрадь. Ведение конспекта на листочках не рекомендуется, поскольку они не так удобны в использовании и часто теряются. При оформлении конспекта лекции необходимо оставлять поля, где студент может записать свои собственные мысли, возникающие параллельно с мыслями, высказанными лектором, а также вопросы, которые могут возникнуть в процессе слушания, чтобы получить на них ответы при самостоятельной проработке материала лекции, при изучении рекомендованной литературы или непосредственно у преподавателя в конце лекции. Составляя конспект лекции, следует оставлять значительный интервал между строчками. Это связано с тем, что иногда возникает необходимость вписать в первоначальный текст лекции одну или несколько строчек, имеющих принципиальное значение и почерпнутых из других источников. Расстояние между строками необходимо также для подчеркивания слов или целых групп слов (такое подчеркивание вызывается необходимостью привлечь внимание к данному месту в тексте при повторном чтении). Обычно подчеркивают определения, выводы.

Также важно полностью без всяких изменений вносить в тетрадь схемы, таблицы, чертежи и т.п., если они предполагаются в лекции. Для того, чтобы совместить механическую запись с почти дословным фиксированием наиболее важных положений, можно использовать системы условных сокращений. В первую очередь сокращаются длинные слова и те, что повторяются в речи лектора чаще всего. При этом само сокращение должно быть по возможности кратким.

Семинарские (практические) занятия Самостоятельная работа студентов по подготовке к семинарскому (практическому) занятию должна начинаться с ознакомления с планом семинарского (практического) занятия, который включает в себя вопросы, выносимые на обсуждение, рекомендации по подготовке к семинару (практическому занятию), рекомендуемую литературу к теме. Изучение материала следует начать с просмотра конспектов лекций. Восстановив в памяти материал,

студент приводит в систему основные положения темы, вопросы темы, выделяя в ней главное и новое, на что обращалось внимание в лекции. Затем следует внимательно прочитать соответствующую главу учебника.
Для более углубленного изучения вопросов рекомендуется конспектирование основной и дополнительной литературы.
Читая рекомендованную литературу, не стоит пассивно принимать к сведению все написанное, следует анализировать текст, думать над ним, этому способствуют записи по ходу чтения, которые превращают чтение в процесс. Записи могут вестись в различной форме: развернутых и простых планов, выписок (тезисов), аннотаций и конспектов.
Подобрав, отработав материал и усвоив его, студент должен начать непосредственную подготовку своего выступления на семинарском (практическом) занятии для чего следует продумать, как ответить на каждый вопрос темы.
По каждому вопросу плана занятий необходимо подготовиться к устному сообщению (5-10 мин.), быть готовым принять участие в обсуждении и дополнении докладов и сообщений (до 5 мин.).
Выступление на семинарском (практическом) занятии должно удовлетворять следующим требованиям: в нем излагаются теоретические подходы к рассматриваемому вопросу, дается анализ принципов, законов, понятий и категорий; теоретические положения подкрепляются фактами, примерами, выступление должно быть аргументированным.
Самостоятельная работа обучающихся– это планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.
Объем самостоятельной работы определяется учебным планом основной профессиональной образовательной программы (ОПОП), рабочей программой дисциплины (модуля).
Самостоятельная работа организуется и проводится с целью формирования компетенций, понимаемых как способность применять знания, умения и личностные качества для успешной практической деятельности, в том числе:
- формирования умений по поиску и использованию нормативной, правовой, справочной и специальной литературы, а также других источников информации;
- качественного освоения и систематизации полученных теоретических знаний, их углубления и расширения по применению на уровне межпредметных связей;
- формирования умения применять полученные знания на практике (в профессиональной деятельности) и закрепления практических умений обучающихся;
- развития познавательных способностей, формирования самостоятельности мышления обучающихся;
- совершенствования речевых способностей обучающихся;
- формирования необходимого уровня мотивации обучающихся к систематической работе для получения знаний, умений и владений в период учебного семестра, активности обучающихся, творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования способностей к саморазвитию (самопознанию, самоопределению, самообразованию, самосовершенствованию, самореализации и саморегуляции);
- развития научно-исследовательских навыков;
- развития навыков межличностных отношений.
К самостоятельной работе по дисциплине (модулю) относятся: проработка теоретического материала дисциплины (модуля);подготовка к семинарским и практическим занятиям, в т.ч. подготовка к текущему контролю успеваемости обучающихся(текущая аттестация); подготовка к лабораторным работам; подготовка к промежуточной аттестации (зачётам, экзаменам).
Виды, формы и объемы самостоятельной работы обучающихся при изучении дисциплины (модуля) определяются:
- содержанием компетенций, формируемых дисциплиной (модулем);
- спецификой дисциплины (модуля), применяемыми образовательными технологиями;
- трудоемкостью СР, предусмотренной учебным планом;
- уровнем высшего образования (бакалавриат, специалитет, магистратура, аспирантура), на котором реализуется ОПОП;
- степенью подготовленности обучающихся.

1. Поиск родственных задач

1. Легко распилить кубик $3 \times 3 \times 3$ на 27 кубиков шестью распилами. Можно ли уменьшить число распилов, если разрешается перекладывать части перед тем как их пилить?
2. Докажите, что в выпуклом n-угольнике сумма внутренних углов равна $180°(n-2)$.
3. Докажите, что $n(n+1)(n+2)$ делится на 6 при любом целом n.
4. Решите уравнение $(x^2+x-3)^2+2x^2+2x-5=0$.
5 (для тех, кто знаком с понятием инверсии). Постройте окружность, касательную к трём данным.
6 Постройте общую внутреннюю касательную к двум окружностям.

2. Причёсывание задач (или «можно считать, что…»)

1. В кладовой лежат 300 сапог: 100 хромовых, 100 кирзовых и 100 яловых, причём левых и правых поровну — по 150. Докажите, что из имеющихся сапог можно составить по крайней мере 50 пар.
2. Из бумажного параллелограмма вырезали треугольник. Докажите, что его площадь не превосходит половины площади параллелограмма.
3. На плоскости нарисовано несколько точек. Двое по очереди соединяют их отрезками. Отрезки могут выходить из одной точки, но не должны пересекаться. Кто не может сделать ход, проигрывает. Докажите, что при любых ходах игроков победителем будет один и тот же, а кто именно — определяется лишь начальной позицией.
Указание. Игра заканчивается, если рисунок представляет собой многоугольник, разбитый на треугольники.

4. Дан выпуклый многоугольник площади 9. Его пересекают десять параллельных прямых на расстоянии 1 друг от друга. Докажите, что сумма длин отрезков, высеченных многоугольником на этих прямых, не более десяти.
5. В n-мерном кубе покрашено более половины вершин. Ребро называется покрашенным, если покрашены обе ограничивающие его вершины. Докажите, что покрашено не менее n рёбер.
6. Дан многогранник с n вершинами и точка A внутри него. Пусть $\vec{e_i}$ —единичный вектор, направленный из точки A к i-й вершине многогранника. Докажите, что $|\sum \vec{e_i}| < n-2$.
7. Алфавит некоторого языка состоит из n букв. Известно, что ни одно слово не является началом другого. a_k — число слов языка, состоящих из k букв. Докажите, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{n^k} \leqslant 1$.
Указание. Попробуйте заменить слова максимальной длины на меньшие слова.

3. Доказательство от противного

1. По кругу расставлены 100 чисел. Известно, что каждое число равно среднему арифметическому двух соседних. Докажите, что все числа равны.

2. На плоскости отмечено несколько точек. Известно, что любые четыре из них являются вершинами выпуклого четырёхугольника. Докажите, что все отмеченные точки являются вершинами выпуклого многоугольника.

3. Докажите, что если $(m-1)!+1$ делится на m, то число m — простое.

4. Существует ли выпуклый многоугольник, у которого больше трёх острых углов?

5. Докажите, что не существует многогранника, у которого число граней нечётно и каждая грань имеет нечётное число вершин.

6. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, имеющих вид а) $4k+3$; б) $3k+2$; в) $6k+5$.

4. Чётность

1. Можно ли разменять 25 рублей десятью купюрами достоинством 1, 3 и 5 рублей ?

2. Девять шестеренок зацеплены по кругу: первая со второй, вторая с третьей и т. д., девятая с первой. Могут ли они вращаться? А если шестеренок n?

3. В ряд стоят 100 фишек. Разрешается менять местами любые две фишки, стоящие через одну. Можно ли таким способом переставить фишки в обратном порядке?

4. Даны 6 чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешается к любым двум из них прибавлять 1. Можно ли все числа сделать равными?

5. Все кости домино выложили в цепочку по правилам игры. На одном конце оказалась пятёрка. Что может оказаться на другом конце?

6. Может ли прямая, не проходящая через вершины 11-угольника, пересекать все его стороны?

7. На столе стоят 7 перевёрнутых стаканов. Разрешается одновременно переворачивать любые два стакана. Можно ли добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?

8. В языке дикарей хотийцев всего два звука: «ы» и «у». Два слова означают одно и то же, если одно получается из другого при помощи некоторого числа следующих операций: пропуска идущих подряд звуков «ыу» или «ууыы» и добавления в любом месте звуков «уы». Означают ли одно и то же слова «уыу» и «ыуы» ?

9. На доске написаны числа 1, 2, ..., 101. Разрешается стереть любые два числа и написать их разность. Повторив эту операцию 100 раз, мы получим одно число. Докажите, что это число не может быть нулем.

10. Улитка ползёт по плоскости с постоянной скоростью и каждые 15 минут поворачивает на 90°. Докажите, что она может вернуться в исходную точку только через целое число часов.

11. В трёх вершинах квадрата сидели кузнечики. Они стали играть в чехарду: один из кузнечиков прыгает в точку, симметричную относительно другого. Сможет ли хоть один кузнечик попасть в четвёртую вершину квадрата?

5. Обратный ход

1. Однажды царь наградил крестьянина яблоком из своего сада. Пошёл крестьянин к саду и видит: весь сад огорожен тройным забором, в каждом заборе только одни ворота, и в каждых воротах стоит сторож. Подошёл крестьянин к первому сторожу и показал царский указ, а сторож ему в ответ: «Иди возьми, но при выходе отдашь мне половину тех яблок, что несёшь, и ещё одно». То же ему сказали второй и третий сторож. Сколько яблок должен взять крестьянин, чтобы после расплаты со сторожами у него осталось одно яблоко?

2. Трём братьям дали 24 бублика так, что каждый получил на три бублика меньше, чем ему лет. Меньший брат был сообразительный и предложил поменять часть бубликов: «Я, — сказал он, — оставлю половину бубликов, а другую разделю между вами поровну; после этого средний брат также оставит половину бубликов, а другую разделит поровну между мной и старшим братом. В конце старший брат поделит так же». Так они и сделали. Оказалось, что все получили поровну. Сколько лет каждому брату?

3. Учитель раздавал школьникам открытки. Первому он дал одну открытку и одну десятую оставшихся. Второму он дал две открытки и одну десятую оставшихся и т. д. Девятому он дал девять открыток и одну десятую оставшихся. Оказалось, что все получили поровну и все открытки были розданы. Сколько всего было открыток?

6. Подсчёт двумя способами

1. Можно ли соединить 5 городов дорогами так, чтобы каждый город был соединён с тремя другими?

2. В каждой клетке прямоугольной таблицы размером $m \times k$ клеток написано число. Сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце равна 1. Докажите, что $m = k$.

3. Существует ли выпуклый 1978-угольник, все углы которого выражаются целым числом градусов?

4. Найдите сумму коэффициентов многочлена

$$(x^3 - x + 1)^{100}.$$

5. Докажите, что не существует многогранника, у которого

а) все грани — шестиугольники;

б) в каждой вершине сходятся 6 граней.

6. Треугольник разрезали на выпуклые четырёхугольники. Докажите, что хотя бы у одного четырёхугольника есть угол не меньше $120°$.

7. В городе отличников от каждой площади отходит ровно 5 улиц. Докажите, что число площадей чётно, а число улиц делится на 5 (улицы соединяют площади).

8. В квадрате со стороной единица поместили несколько отрезков, параллельных сторонам квадрата (квадрату принадлежит граница, а отрезкам принадлежат концы). Отрезки могут пересекать друг друга. Сумма их длин равна 18. Докажите, что среди частей, на которые квадрат разбит объединением отрезков, найдётся такая, площадь которой не меньше 0.01.

Указание. Оцените двумя способами сумму периметров частей. Чем меньше площадь, тем относительно больший периметр на неё приходится.

9. Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную относительно другого кузнечика. Докажите, что кузнечики не могут одновременно оказаться в вершинах квадрата большего размера.

10. На Олимпе есть игра: всем богам наливают поровну амброзии, затем один бог переливает другому столько амброзии, сколько у того уже было, и это повторяется несколько раз. Однажды удалось слить всю амброзию в чашу Зевса. Докажите, что количество богов является степенью двойки.

7. Соответствие

1. Докажите, что дроби $\frac{1000}{1993}$ и $\frac{993}{1993}$ имеют одинаковую длину периодов.

2. Докажите, что сумма номеров счастливых билетов делится на 13. (Определение см. в примере 3.)

3. По кругу расставлены 8 точек. Двое по очереди соединяют их отрезками. Первый отрезок проводится произвольно, а каждый следующий отрезок начинается из конца предыдущего. Проигрывает тот, кто не может провести новый отрезок (дважды проводить отрезок нельзя). Предположим, что игроки не делают ошибок. Кто из них победит: первый или второй?

4. На окружности даны 1987 точек, одна из них отмечена. Рассмотрим всевозможные выпуклые многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше: тех, которые содержат отмеченную точку, или тех, которые её не содержат?

5. Докажите, что число $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{999}$ представимо в виде $a\sqrt{3}-b\sqrt{2}$, причём $3a^2-2b^2=1$.

6. Существуют ли такие рациональные α_i и β_i, что

$$(\alpha_1+\beta_1\sqrt{2})^2+(\alpha_2+\beta_2\sqrt{2})^2+\ldots+(\alpha_n+\beta_n\sqrt{2})^2=5+4\sqrt{2}\ ?$$

7. Докажите, что число $(\sqrt{2}-1)^n$ представимо в виде $\sqrt{m+1}-\sqrt{m}$, где $m\in\mathbb{N}$.

8. Двое бросают монетку: один бросил её 10 раз, другой — 11. Чему равна вероятность того, что у второго монета упала орлом большее число раз, чем у первого?

9. В самолёте 100 мест, на авиарейс проданы 100 билетов, пронумерованных соответственно местам. В салон пассажиры входят по очереди. Первой входит сумасшедшая старушка, которая, не глядя на билет занимает первое попавшееся место. Каждый следующий пассажир, входя в салон ищет своё место, и если оно свободно, то занимает его. Если же его место занято, то садится на произвольное место. Какова вероятность того, что последний вошедший пассажир сядет на своё место?

8. Графы

1. Расположите на плоскости 6 точек и соедините их непересекающимися линиями так, чтобы из каждой точки выходили четыре линии.

2. В трёх вершинах правильного пятиугольника расположили по фишке. Разрешается передвигать их по диагонали в любую свободную вершину. Можно ли таким образом добиться того, чтобы одна из фишек вернулась на свое место, а две другие поменялись местами?

3. В марсианском метро 100 станций. От любой станции до любой другой можно проехать. Забастовочный комитет хочет закрыть проезд через одну из станций так, чтобы между всеми остальными станциями был возможен проезд. Докажите, что такая станция найдётся.

4. На математической олимпиаде было предложено 20 задач. На закрытие пришло 20 школьников. Каждый из них решил по две задачи, причём выяснилось, что среди пришедших каждую задачу решило ровно два школьника. Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал одну из решенных им задач, и все задачи были разобраны.

5. Докажите, что в плоском графе найдётся вершина, из которой выходит не более 5 рёбер.

6. а) Вершины плоского графа можно раскрасить в 6 цветов так, чтобы вершины, соединённые ребром, имели разный цвет.

б) Конечная плоская карта допускает раскраску в 6 цветов такую, что соседние страны будут окрашены в разные цвета.

Указание. а) Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи — найдите вершину, из которой выходит не более 5 рёбер. Далее примените индукцию — если удалось покрасить все вершины, кроме этой одной, то и для неё цвет найдётся.

7. В спортклубе тренируются 100 толстяков, веса которых равны 1 кг, 2 кг, ..., 100 кг. На какое наименьшее число команд их можно разделить, чтобы ни в какой команде не было двух толстяков, один из которых вдвое тяжелее другого?

8. Клетчатая плоскость раскрашена десятью красками так, что соседние (т. е. имеющие общую сторону) клетки покрашены в разные цвета, причём все десять красок использованы. Каково минимально возможное число пар соседних красок? (Две краски называются *соседними*, если ими покрашены какие-то две соседние клетки.)

9. В тридевятом царстве каждые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что существует город, из которого можно проехать в любой другой не более чем по двум дорогам.

10. В городе на каждом перекрестке сходится чётное число улиц. Известно, что с любой улицы города можно проехать на любую другую. Докажите, что все улицы города можно объехать, побывав на каждой по одному разу.

11. Последовательность из 36 нулей и единиц начинается с пяти нулей. Среди пятёрок подряд стоящих цифр встречаются все 32 возможные комбинации. Найдите пять последних цифр последовательности.

12. Дан правильный 45-угольник. Можно ли так расставить в его вершинах цифры от 0 до 9 так, чтобы для любой пары различных цифр нашлась сторона, концы которой занумерованы этими цифрами.

Указание. Рассмотреть полный граф, вершины которого суть цифры от 0 до 9. Задача сводится к его обходу.

13. Докажите, что можно расположить по кругу символы 0 и 1 так, чтобы любой возможный набор из n символов, идущих подряд, встретился.

Указание. Рассмотреть граф, вершины которого суть слова длины $n-1$. Две вершины u и v соединяются стрелкой, если существует слово длины n, у которого u является началом, а v — концом.

14. Рёбра дерева окрашены в два цвета. Если в какую-то вершину приходят рёбра только одного цвета, то их все можно перекрасить в другой цвет. Можно ли все дерево сделать одноцветным?

15. Докажите, что количество вершин любого дерева на единицу больше количества его рёбер.

9. Инварианты

1. Можно ли разрезать выпуклый 17-угольник на 14 треугольников?

2. Можно ли круг разрезать на несколько частей и сложить из них квадрат? (Разрезы — это прямые и дуги окружностей.)

3. Болельщик Вася нарисовал расположения игроков на футбольном поле к началу первого и второго таймов. Оказалось, что некоторые игроки поменялись местами, а остальные остались на своих местах. При этом расстояние между любыми двумя игроками не увеличилось. Докажите, что все эти расстояния не изменились.

4. Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин правильного n-угольника до любой прямой, проходящей через его центр есть величина постоянная.

5 (сизифов труд). На горе 1001 ступенька, на некоторых лежат камни, по одному на ступеньке. Сизиф берет любой камень и переносит его вверх на ближайшую свободную ступеньку (т. е. если ближайшая ступенька свободна, то на неё, а если она занята, то на несколько ступенек вверх до первой свободной). После этого Аид скатывает на одну ступеньку вниз один из камней, у которых предыдущая ступенька свободна. Камней 500 и первоначально они лежали на нижних 500 ступеньках. Сизиф и Аид действуют по очереди начинает Сизиф. Цель Сизифа положить камень на верхнюю ступеньку. Может ли Аид ему помешать?

6. Столица страны соединена авиалиниями со 100 городами, а каждый город, кроме столицы, соединён авиалиниями ровно с 10 городами (если A соединён с B, то B соединён с A). Известно, что из любого города можно попасть в любой другой (может быть, с пересадками). Докажите, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, так что возможность попасть из любого города в любой другой сохранится.

7. Во время перемирия за круглом столом разместились рыцари из двух враждующих станов. Оказалось, что число рыцарей, справа от которых сидит враг, равно числу рыцарей, справа от которых сидит друг. Докажите, что число рыцарей делится на 4.

8. В одном бидоне находится 1 л воды, а в другом — 1 л спирта. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного бидона в другой. Можно ли добиться, чтобы в первом бидоне концентрация спирта оказалась больше 50%

9. Круг разрезали на части и сложили выпуклую фигуру. Докажите, что это опять круг. (Разрезы — это участки прямых и дуги окружностей.)

10. Можно ли разрезать правильный треугольник на части и сложить квадрат, если части можно параллельно переносить, но не поворачивать?

10. Метод крайнего

4. На столе лежат одинаковые монеты без наложений. Докажите, что найдётся монета, которая касается не более трёх других.

5. На столе лежат произвольные монеты без наложений. Докажите, что найдётся монета, которая касается не более пяти других.

6. На столе лежат монеты без наложений. Докажите, что одну из них можно передвинуть по столу к его краю, не сдвинув других монет.

7. На полях шахматной доски расставлены целые числа, причём никакое число не встречается дважды. Докажите, что есть пара соседних (имеющих общую сторону) клеток, числа в которых отличаются не меньше, чем на 5.

8. На окружности стоят 30 чисел, каждое из которых равно модулю разности двух следующих за ним по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 1. Найдите эти числа и порядок их следования по окружности.

9. На прямой расположена колония из конечного числа бактерий. В моменты 1, 2, 3, ... некоторые из бактерий могут погибать; новых бактерий не возникает ни в один момент. Погибают те и только те бактерии, от которых ни слева на расстоянии 1, ни справа на расстоянии $\sqrt{2}$ нет бактерий. Существует ли колония бактерий, которая будет жить вечно?

10. В течение дня в библиотеке побывало 100 читателей. Оказалось, что в тот день из любых трёх читателей двое в библиотеке встретились. Докажите, что сотрудник библиотеки мог сделать важное сообщение в такие два момента времени, чтобы все 100 человек его услышали. (Каждый читатель побывал в библиотеке только один раз.)

11. На плоскости отмечено несколько прямых. Известно, что через точку пересечения любых двух отмеченных прямых, проходит по крайней мере ещё одна. Докажите, что все отмеченные прямые проходят через одну точку.

12. На плоскости отметили несколько точек. Точки, находящиеся от данной на наименьшем расстоянии, назовём ближайшими (их может быть несколько). Докажите, что найдётся точка, имеющая не более трёх ближайших.

13. Найдите наибольшее значение выражения $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{99}x_{100}$, где $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ — неотрицательные числа, сумма которых равна 1.

11. Уход на бесконечность и малые шевеления

1. Докажите, что плоскость нельзя покрыть конечным числом «внутренностей парабол». (Под внутренностью параболы мы понимаем выпуклую фигуру, границей которой является парабола.)

2. Докажите, что площадь параллелограмма с вершинами в целых точках, не содержащего внутри и на границе других целых точек, равна единице.

3. Ограниченная фигура на плоскости имеет площадь $S > 10$. Докажите, что её можно параллельно перенести так, чтобы она покрыла не менее 11 целых точек.

4 (лемма Минковского). Докажите, что центрально-симметричная относительно начала координат выпуклая фигура площади больше 4 содержит ещё хотя бы одну целую точку. *Указание.* Произведите гомотетию с коэффициентом $1/2$ и воспользуйтесь результатом примера 2.

5. Прямая пересекает замкнутую ломаную в 1995 точках. Докажите, что некоторая прямая, не параллельная ни одному звену ломаной, пересекает её не более чем в 1995 точках.

6. Проведены 100 хорд одной окружности, любые две из них пересекаются. Всегда ли можно провести ещё одну хорду так, чтобы она пересекала их все?

7. Докажите, что если натуральные числа k_1, k_2, $\ldots$, k_s таковы, что

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_s} < 1,$$

то существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде $n_1^{k_1} + n_2^{k_2} + \ldots + n_s^{k_s}$ для некоторых целых неотрицательных чисел n_1, n_2, $\ldots$, n_s.

8. Докажите, что для любого натурального числа n существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы n слагаемых, каждое из которых является n-й степенью натурального числа.

12. Принцип Дирихле

1. В классе 30 учеников. Во время контрольной работы Петя сделал 13 ошибок, а остальные — меньше. Докажите, что найдутся три ученика, сделавшие одинаковое число ошибок.

2. На Земле больше шести миллиардов жителей, людей старше 150 лет не существует. Докажите, что на Земле есть два человека, родившихся одновременно с точностью до секунды.

3. На плоскости проведено 12 прямых. Докажите, что какие-то две из них образуют угол не больше $15°$.

4. В ящике лежат носки: 10 чёрных, 10 синих, 10 белых. Какое наименьшее количество носков надо вынуть не глядя, чтобы среди вынутых оказалось два носка а) одного цвета; б) разных цветов; в) чёрного цвета?

5. На карьере добыли 36 камней. Их веса составляют арифметическую прогрессию: 490кг, 495кг, 500кг, $\ldots$, 665кг. Можно ли увезти эти камни на семи трёхтонных грузовиках?

6. Какое наименьшее число карточек спортлото «6 из 49» надо купить, чтобы наверняка хоть на одной из них был угадан хоть один номер?

7. Докажите, что среди любых пяти человек есть двое с одинаковым числом знакомых среди этих пяти человек. (Возможно, эти двое ни с кем не знакомы.)

8. Докажите, что из любых 52 целых чисел всегда можно выбрать два, сумма или разность которых делится на 100.

9. Квадратная таблица $(2n+1)\times(2n+1)$ заполнена числами от 1 до $2n+1$ так, что в каждой строке и в каждом столбце представлены все эти числа. Докажите, что если это расположение симметрично относительно диагонали таблицы, то на этой диагонали тоже представлены все эти числа.

10. В классе 25 человек. Известно, что среди любых трёх из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого не менее 12 друзей.

11. Комиссия из 60 человек провела 40 заседаний, причём на каждом присутствовало ровно 10 членов комиссии. Докажите, что какие-то два члена комиссии встречались на её заседаниях по крайней мере дважды.

12. Каждая из 9 прямых разбивает квадрат на два четырёхугольника, площади которых относятся как $2:3$. Докажите, что по крайней мере три из этих прямых проходят через одну точку.

13. Первоклассник Петя знает только цифру 1. Докажите, что он может написать число, делящееся на 1989.

13. Индукция

1. Докажите, что любое число рублей большее семи можно разменять трёшками и пятёрками. (Трёшками и пятёрками называются купюры в 3 и 5 рублей соответственно, которые находились в обращении в Советском Союзе до 1991 года).

2. Несколько прямых делят плоскость на части. Каждая прямая «заштрихована» с одной стороны. Докажите, что у одной из частей все границы «заштрихованы» изнутри.

3. Из квадрата 128×128 вырезали одну клетку. Докажите, что эту фигуру можно замостить уголками из трёх клеток.

4. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

5. Для любого натурального k докажите неравенство $2^k > k$.

6. Докажите неравенство Коши:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n},$$

где x_1, x_2, …, x_n — неотрицательные числа.

Указание. Используйте более сложную схему индукции по количеству переменных: сначала по степеням двойки, потом от степени двойки к меньшему числу.

7. Четыре одинаковые банки наполнены красками на три четверти; цвета всех красок различны. Имеется возможность переливать любую часть жидкости из одной банки в другую. Можно ли во всех банках сделать одинаковую смесь? (Другой посуды нет, выливать краску нельзя.)

8. В городе N домов. Какое наибольшее число заборов можно построить в этом городе, если 1) заборы не пересекаются, 2) каждый забор огораживает хотя бы один дом, 3) никакие два забора не огораживают одну и ту же совокупность домов?

9. Докажите, что предпоследняя цифра десятичной записи любой степени тройки чётна.

10. Для любого $x \geqslant -1$ и натурального n докажите неравенство Бернулли:

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx.$$

11. *Ханойская башня.* Головоломка «Ханойская башня» представляет собой три штырька, на один из которых нанизаны семь колец убывающих размеров, как показано на рис. 8. Разрешается снимать по одному кольцу с любого штырька и нанизывать его на любой другой штырёк, но при этом запрещается класть большее кольцо поверх меньшего. Можно ли, соблюдая эти правила, переложить все кольца на другой штырёк?

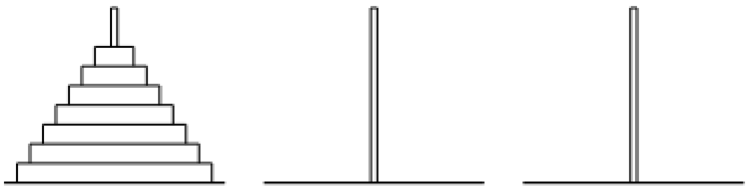


Рис. 8

14. Делимость и остатки

1. Какие числа можно представить в виде разности двух квадратов целых чисел?

2. Если p — простое число, большее трёх, то p^2-1 делится на 24.

3. При каких n число 2^n-1 делится на 7?

4. Известно, что сумма нескольких натуральных чисел делится на 6. Докажите, что сумма кубов этих чисел тоже делится на 6.

5. Докажите, что если целочисленная арифметическая прогрессия содержит квадрат целого числа, то она содержит бесконечно много квадратов целых чисел.

6. Три целых числа связаны соотношением $x^2+y^2=z^2$. Докажите, что x или y делится на 3.

7. Шестизначное число делится на 7. Докажите, что, если последнюю его цифру переставить в начало, то полученное число тоже будет делиться на 7.

8. Найдите три попарно взаимно простых числа таких, что сумма любых двух из них делится на третье.

9. Докажите, что простые числа большие трёх можно записать в одном из двух видов: $6n+1$ либо $6n-1$, где n — натуральное число.

10. Докажите, что если сумма квадратов двух чисел делится на 3, то и каждое из этих чисел тоже делится на 3.

11. Дано натуральное число N. К нему справа приписывают по одной цифре, кроме девятки. Докажите, что рано или поздно получится составное число.

12. Докажите, что существует бесконечно много целых чисел, которые нельзя представить в виде суммы

а) трёх кубов;

б) семи шестых степеней целых чисел.

15. Алгоритм Евклида

1. Решите уравнение в натуральных числах $7x - 11y = 1$.
2. Разделить угол 19° на 19 равных частей.
3. Числа m и n — взаимно просты. Докажите, что уравнение $mx + ny = 1$ имеет решение в целых числах.
4. Докажите, что при любых целых неотрицательных m и n числа $2^{2^m} + 1$ и $2^{2^n} + 1$ являются взаимно простыми.

5. Выведите из предыдущей задачи, что простых чисел бесконечно много. (Другое доказательство бесконечности простых чисел вы найдёте в главе «Доказательство от противного», пример 1.)
6. Числа m и n нечётные. Докажите, что числа $2^m + 1$ и $2^n + 1$ взаимно просты тогда и только тогда, когда n и m взаимно просты.
7. Один прибор делает пометки на длинной ленте через каждые m см, другой — через каждые n см (m и n — взаимно простые). Верно ли, что какая-то синяя пометка окажется на расстоянии не большем 1 см от какой-то красной?
8. Периодическая последовательность имеет периоды m и n. Докажите, что НОД(m, n) — тоже её период.
9. Разрешается сдвигать фишку вдоль числовой прямой на ± 1 и на $\pm\sqrt{2}$. Докажите, что из любого начального положения её можно придвинуть к началу координат ближе чем на 0.0001.
10. «Крокодилом» называется фигура, ход которой заключается в прыжке на клетку, в которую можно попасть сдвигом на одну клетку по вертикали или горизонтали, а затем на N клеток в перпендикулярном направлении (при $N = 2$ «крокодил» — это шахматный конь). При каких N «крокодил» может пройти с любой клетки бесконечной шахматной доски на любую другую?
11. Дан прямоугольник со сторонами 1 и α. От него отрезают квадрат, а с оставшимся прямоугольником проводят ту же процедуру. Рассматривается последовательность отношений сторон получившихся прямоугольников (большей к меньшей). Периодична ли эта последовательность, если число α равно

а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt[3]{2}$; в) $\sqrt{2001}$.

12. *Словом* называется последовательность букв, *произведением* uv двух слов u и v называется результат приписывания одного к другому. Докажите, что если $uv = vu$, то существует такое слово s и натуральные числа k и l, что $u = s^k$, $v = s^l$.
13. Решить уравнение в целых положительных числах

$$x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = \frac{10}{7}.$$

16. Покрытия, упаковки и замощения

1. Квадратный каток надо осветить четырьмя прожекторами, висящими на одной высоте. Каков наименьший радиус освещённых кругов?
2. Можно ли точечный источник света на плоскости заслонить тремя кругами (чтобы любой луч, выходящий из источника, пересекал хотя бы один круг)?

3. Коридор полностью покрыт несколькими ковровыми дорожками. Докажите, что можно убрать несколько дорожек так, чтобы

а) коридор был полностью покрыт, а общая длина оставшихся дорожек была не больше удвоенной длины коридора;

б) оставшиеся дорожки не перекрывались и их суммарная длина была не меньше половины длины коридора.

4. Пол в прямоугольной комнате 6×3кв. м покрыт квадратными коврами разных размеров, края которых параллельны стенам. Докажите, что можно убрать несколько ковров так, чтобы оставшиеся ковры покрывали более 2кв. м.

5. На столе лежат 15 журналов, полностью покрывая его. Докажите, что можно убрать 7 журналов так, чтобы оставшиеся покрывали не менее $8/15$ площади стола.

6. Круглый стол покрыт круглыми салфетками разных размеров. Докажите, что можно выбрать несколько салфеток, которые не пересекаются и закрывают не менее $1/9$ площади стола.

7. Любые три из четырёх выпуклых фигур на плоскости пересекаются. Докажите, что все фигуры пересекаются.

8. Плоскость покрыта конечным числом полуплоскостей. Докажите, что из них можно выбрать три (или две) полуплоскости, которые покрывают всю плоскость.

9. Прожектор освещает прямой угол. Четыре прожектора поместили в произвольных точках плоскости. Докажите, что прожекторы можно повернуть так, что они осветят всю плоскость.

10. На шахматной доске расставляют королей так, чтобы они били все клетки. Каково наименьшее число королей?

11. Из листа клетчатой бумаги 29×29 клеток вырезали 99 квадратов 2×2. Докажите, что из остатка можно вырезать ещё один такой квадрат.

12. Пусть A — наибольшее число попарно непересекающихся кругов диаметра 1, центры которых лежат внутри многоугольника M, B — наименьшее число кругов диаметра 2, которыми можно покрыть многоугольник. Что больше: A или B?

13. На круглом столе радиуса R лежат без наложений n круглых монет радиуса r. Докажите, что

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}-1\right) \leqslant \sqrt{n} \leqslant \frac{R}{r}.$$

14. Пусть S — площадь выпуклого многоугольника, P — его периметр, R — радиус максимального вписанного круга. Докажите, что

$$\frac{S}{P} \leqslant R \leqslant \frac{2S}{P}.$$

15. Окружность покрыта бесконечным числом открытых дуг. Докажите, что можно выбрать несколько дуг, которые покрывают окружность и имеют суммарную длину не более 720°?

16. На листе бумаги расположено несколько прямоугольников, стороны которых параллельны осям координат. Каждые два прямоугольника имеют общие точки. Докажите, что существует точка, принадлежащая всем прямоугольникам.

17. На клетчатой бумаге даны произвольные n клеток. Докажите, что среди них можно выбрать не меньше $n/4$ клеток, не имеющих общих точек.

18. Квадратная площадь размером 100×100 выложена квадратными плитами 1×1 четырёх цветов: белого, красного, чёрного и серого — так, что никакие две плиты одинакового цвета не соприкасаются друг с другом (т. е. не имеют общей стороны или вершины). Сколько может быть красных плит?

19. Двое по очереди ставят на шахматную доску коня, причём его можно ставить на любую незанятую клетку, которая не бьется ни одним из уже стоящих коней. Тот, кто не может поставить коня, проигрывает. Кто победит при правильной игре?

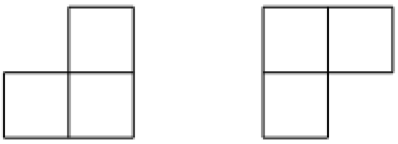
Указание. Разбейте доску на пары центрально симметричных клеток.

20. Из шахматной доски вырезаны одна чёрная и одна белая клетки. Докажите, что её можно замостить прямоугольниками из двух клеток.

17. Раскраски

1. В каждой клетке доски 5×5 сидел жук. Затем каждый жук переполз на соседнюю (по стороне) клетку. Докажите, что осталась хотя бы одна пустая клетка.

2. Прямоугольник $m\times n$ разрезан на уголки из трёх клеток. Докажите, что разность между количеством уголков, ориентированных как на рис. 10а), и количеством уголков, ориентированных как на рис. 10б), делится на 3.



а) б)

Рис. 10

3. Прямая раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся 3 точки A, B, C одного цвета такие, что $AB = BC$.

4. Раскрасьте прямую в три цвета так, чтобы нельзя было найти трёх точек A, B, C разного цвета таких, что $AB = BC$.

5. Плоскость раскрашена в три цвета. Докажите, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1.

6. Раскрасьте плоскость а) в 9, б) в 7 цветов так, чтобы не нашлось двух точек одного цвета на расстоянии 1.

7. Можно ли замостить доску 6×6 клеток полосками из трёх клеток и одним уголком из трёх клеток?

8. Можно ли замостить доску 10×10 прямоугольниками 4×1?

9. Можно ли доску 5×7 покрыть уголками из трёх клеток в несколько слоев (чтобы каждая клетка была покрыта одинаковым числом уголков)?

Указание. Расставить числа, чтобы общая сумма была положительна, а сумма в каждом уголке — отрицательна.

18. Игры

1. Есть куча из n спичек. Разрешается брать от 1 до 10 спичек, выигрывает взявший последнюю спичку. При каких n выигрывает начинающий?

2. В крайних клетках полоски 1×20 стоят белая и чёрная шашки. двое по очереди передвигают свою шашку на одну или две клетки вперед или назад, если это возможно (перепрыгивать через шашку нельзя). Проигрывает тот, кто не может двинуть свою шашку. Как играть начинающему, чтобы выиграть?

3. По кругу расставлены 8 точек. Двое по очереди соединяют их отрезками. Первый отрезок проводится произвольно, а каждый следующий начинается из конца предыдущего. Проигрывает тот, кто не может провести новый отрезок (дважды проводить один отрезок нельзя). Кто победит при правильной игре?

4. В строчку выписаны натуральные числа от 1 до 20. Двое по очереди ставят перед этими числами знак $+$ или $-$ (знак можно ставить перед любым числом, перед которым он ещё не стоит, включая первое). Игра заканчивается после того, как проставлены все 20 знаков, затем вычисляется значение получившегося выражения. Первый хочет добиться, чтобы оно было по абсолютной величине как можно меньше, а второй — как можно больше. Какое наибольшее по абсолютной величине значение может обеспечить в итоге второй игрок?

5. В строчку выписаны 1992 звёздочки. Двое игроков по очереди заменяют их на цифры от 0 до 9. Может ли второй игрок добиться того, чтобы окончательное число делилось бы на 1993?

6. Есть две кучи камней, причём в большей — 8 камней. Два игрока по очереди берут либо несколько камней из одной кучи, либо по равному количеству камней из обеих куч. Выигрывает тот, кто возьмет последний камень. Кто выиграет при правильной игре?

7. На трёх крайних справа полях доски $1 \times n$ стоит по фишке. Двое по очереди берут одну из фишек и передвигают её на несколько полей влево. Проигрывает тот, кто не может сделать свой ход. Кто выигрывает при правильной игре?

8. В 50 коробках лежат 100 конфет. Девочка и мальчик берут поочередно по конфете. Может ли мальчик добиться того, чтобы последние две конфеты лежали в одной коробке?

9. В одной куче 18 конфет, а в другой — 23. Двое по очереди съедают одну из куч, а другую делят ещё на две кучи. Тот, кто не сможет поделить кучу (если там одна конфета), проигрывает. Как должен играть начинающий, чтобы выиграть?

10. На бесконечном листе клетчатой бумаги двое по очереди соединяют узлы соседних клеток по вертикали или горизонтали, один красным отрезком, другой — синим. Нельзя обводить один отрезок дважды. Может ли первый игрок создать замкнутый контур красного цвета?

11. Пять ямок расположены в ряд. В каждой лежит по шарику. За ход разрешается переложить все шарики из какой-нибудь ямки в соседнюю справа ямку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход (когда все шарики лежат в самой правой ямке). Кто победит, если игроки не делают ошибок?

12. На бесконечной плоскости расположены фишка-волк и 50 фишек-овец. Двое ходят по очереди: один игрок передвигает волка, а другой — одну из овец. И волк, и овцы передвигаются за один ход в любую сторону не более чем на один метр. Верно ли, что при любой первоначальной позиции волк поймает хотя бы одну овцу?

19. Процессы и операции

1. Есть N прямых общего положения и N точек. Докажите, что их можно занумеровать так, что перпендикуляры, опущенные из этих точек на прямые с теми же номерами, не будут пересекаться.

2. На заседании каждый член парламента дал пощёчину ровно одному своему коллеге. Докажите, что парламент можно разбить на три фракции так, что члены одной фракции пощёчин друг другу не давали.

3. Запись числа состоит из нулей и единиц. Любой фрагмент числа «10» заменяют на «0001». Докажите, что наступит момент, когда заменять будет нечего.

4. Докажите, что N точек на плоскости всегда можно покрыть несколькими непересекающимися кругами, сумма диаметров которых меньше N и расстояние между любыми двумя из которых больше 12. (Расстояние между кругами — это расстояние между их ближайшими точками.)

5. Шахматную доску 8×8 покрыли 32 прямоугольниками из двух клеток (доминошками). Докажите, что найдутся две доминошки, образующие квадрат 2×2.

6. N доминошек уложены в виде прямоугольника. Если две доминошки образуют квадрат, то их можно повернуть на $90°$. Докажите, что можно все доминошки сориентировать одинаково.

7. Дан произвольный набор из n целых чисел: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Из него получается новый набор: $\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_2+a_3}{2}, \ldots, \frac{a_n+a_1}{2}$; из этого набора — следующий по тому же правилу и т. д. Докажите, что если все получающиеся числа — целые, то первоначальные числа равны между собой.

8. Дан треугольник с разными сторонами. В него вписывают окружность. В точках касания строят новый треугольник. В него снова вписывают окружность и т. д. Докажите, что среди получившихся треугольников нет двух подобных.

9. Докажите, что если последняя цифра числа n не нуль, то существует такое целое k, что в десятичной записи числа kn нет нулей.

10. В классе 32 ученика. Было организовано 33 кружка, причём каждый кружок состоит из трёх человек и никакие два кружка не совпадают по составу. Докажите, что найдутся два кружка, которые пересекаются ровно по одному ученику.

11. Дан ориентированный граф. Из каждой его вершины выходит n стрелок, и в каждую его вершину входит n стрелок. Докажите, что можно убрать часть рёбер так, чтобы он разбился на циклы.

12. Имеется неограниченное число чёрных и белых кубиков. Надо построить из них сплошную башню в форме параллелепипеда так, чтобы каждый чёрный кубик граничил с чётным числом белых, а каждый белый — с нечётным числом чёрных. При любом ли заданном нижнем слое кубиков такую башню (конечной высоты) можно построить?

13. Две карты Москвы разного масштаба наложены друг на друга так, что меньшая карта лежит целиком на большей. Докажите, что их можно проткнуть булавкой так, чтобы на обоих картах была проколота одна и та же точка Москвы.

14. а) Внутри квадрата со стороной 1 расположены четыре точки. Докажите, что из них найдутся две, расстояние между которыми не превосходит 1.

б) Та же задача для куба с восемью точками.

Критерии оценки:

Отметка «5» ставится в следующих случаях:

– работа выполнена полностью;

– в логических рассуждениях и обоснованиях нет пробелов и ошибок;

– в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала);

Отметка «4» ставится, если:

– работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умения обосновывать рассуждения не являлись специальным объектом проверки);

– допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки);

Отметка «3» ставится, если:

– допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графика, но студент владеет обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

– допущены существенные ошибки, показавшие, что студент не владеет обязательными знаниями по данной теме в полной мере;

– работа показала полное отсутствие у студента обязательных знаний, умений по проверяемой теме или значительная часть работы выполнена не самостоятельно.